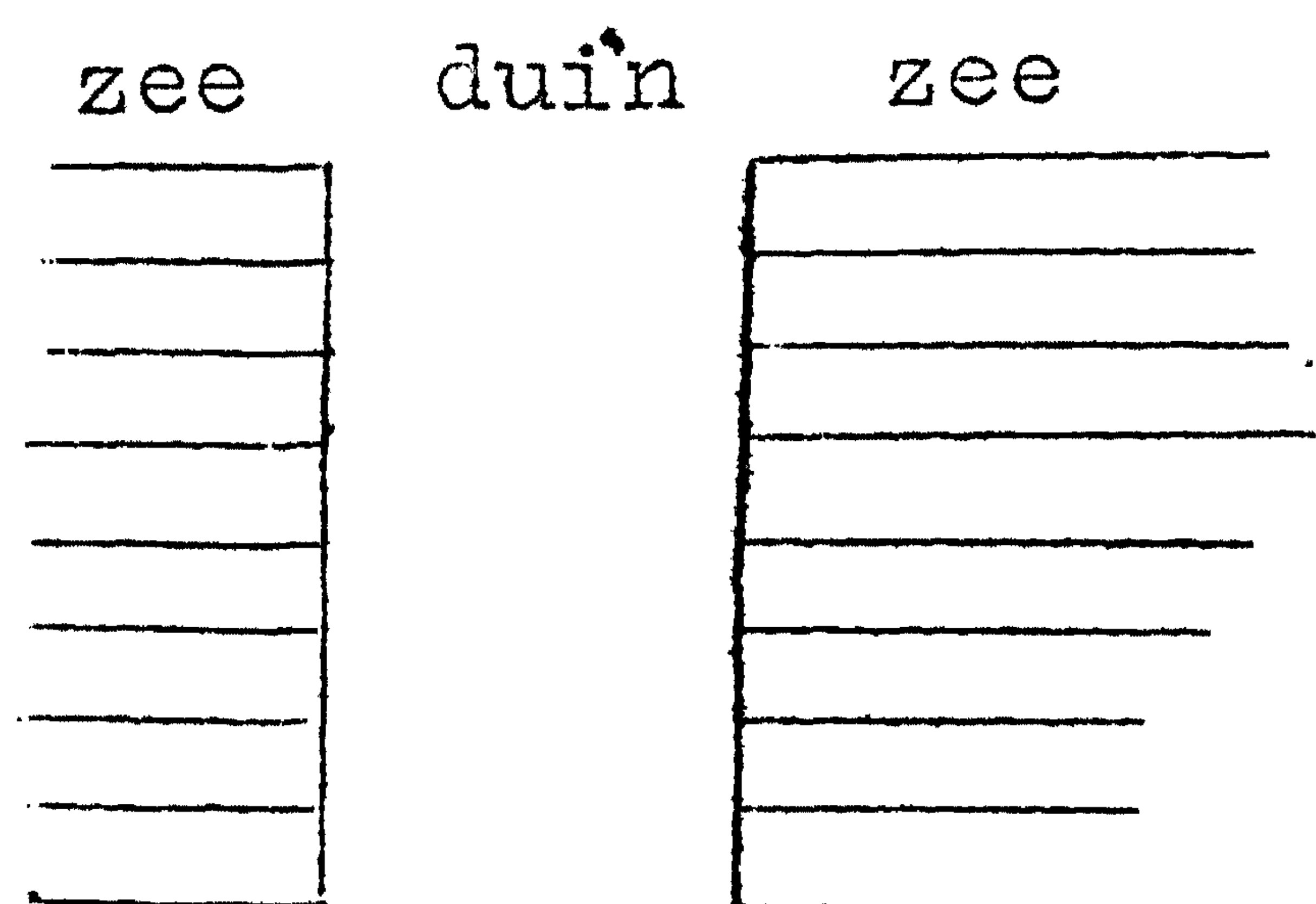


Mathematisch Centrum
Afd. Toegepaste Wiskunde
Rapport T.W. no. 10
Auteur: J.H. Kemperman
Titel: Bepaling van de nuttige neerslag
uit de diepte van de zoutgrens
Datum: December 1950.

INHOUD

1. Inleiding
2. Differentiaalvergelijkingen voor
de functies $q_0(x)$, $q_1(x)$ en $q_2(x)$
3. De oplossing van de differentiaal-
vergelijkingen
4. De berekening van de nuttige neerslag
5. Een numeriek voorbeeld
6. De bepaling van de veilige water-
onttrekking.

Bepalingen van de nuttige neerslag uit de diepte van de zoutgrens.

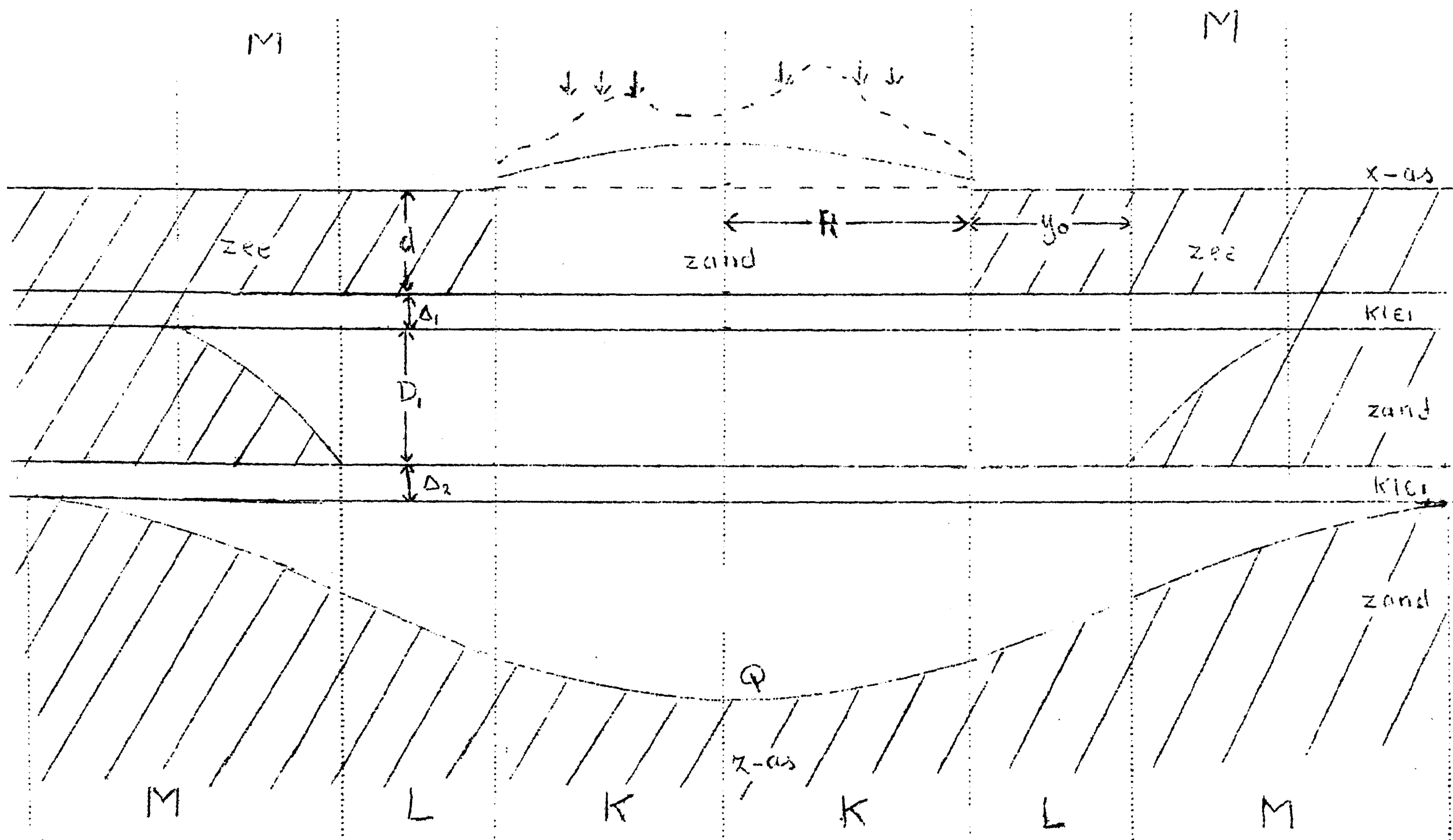


bovenaanzicht

1. Inleiding.

We beschouwen een oneindig lange duinstrook, welke aan weerszijden door de zee wordt begrensd. Tengevolge van de neerslag zal zich onder de duinen een zoetwaterzak vormen. Uit boringen is bekend, dat de scheiding tussen zout en zoet water aan de onderzijde van deze zak zeer scherp is. Zij in het midden van de duinstrook ξ de diepte van deze zoutgrens (gemeten vanaf zeeniveau). Het is duidelijk, dat bij toenemende nuttige neerslag N ook de diepte ξ zal toenemen. Het moet dus in principe mogelijk zijn de nuttige neerslag N te berekenen, wanneer zowel ξ als de geo-hydrologische structuur van het terrein bekend is. In dit rapport zullen we voor een speciaal geval aangeven hoe deze berekening kan worden uitgevoerd.

We zullen aannemen, dat elke dwarsdoorsnede een zelfde geo-hydrologische structuur heeft, welke aangegeven wordt door de volgende figuur.



De figuur is symmetrisch t.o.v. de z-as (de x-as kiezen we op zeeniveau). De gestreepte gebieden zijn doordrenkt met zout water. Het overige gebied (tussen het phreatisch oppervlak en de zoutgrenzen) is doordrenkt met zoet water. Verder wordt aangenomen, dat de klei- en zandlagen homogeen zijn. De weerstand van de bovenste en onderste kleilaag geven we aan met c_1 resp. c_2 . De doorlaat coëfficiënten van het bovenste middelste en onderste zandpakket duiden we aan met k_0 resp. k_1 resp. k_2 .

De zandlagen hebben een grote doorlaatbaarheid, terwijl de kleilagen daarentegen moeilijk doorlaatbaar zijn. Dientengevolge is de stroming in de kleilagen praktisch verticaal en in de zandlagen praktisch horizontaal. We mogen dus aannemen, dat in elk der zandlagen de zoetwaterpotentiaal ¹⁾ alleen een functie is van de horizontaal gemeten coördinaat x . Voor de bovenste, middelste en onderste zandlaag geven we de zoetwater-potentiaal in de stationnaire toestand aan met $\varphi_0(x)$ resp. $\varphi_1(x)$ resp. $\varphi_2(x)$.

Uit het (waargenomen) feit, dat de zoutgrens een scherpe scheiding tussen zout en zoet water vormt, volgt dat beneden de zoutgrens het (zoute) water ongeveer in rust is. Wanneer P een punt is van de zoutgrens op een diepte z beneden zeeniveau, dan volgt dus uit de hoofdwet van de hydrostatica, dat de zoetwater-potentiaal in P gelijk is aan γz , wanneer $1 + \gamma$ het soortelijk gewicht van het zoute water voorstelt. De zoetwatertong in de middelste zandlaag heeft blijkbaar een zoutgrens met vergelijking

$$(1) \quad z(x) = \frac{1}{\gamma} \varphi_1(x),$$

terwijl de zoutgrens in de onderste zandlaag wordt gegeven door de vergelijking

$$(2) \quad z(x) = \frac{1}{\gamma} \varphi_2(x).$$

Verder is het duidelijk, dat

$$-z(x) = \varphi_0(x)$$

de vergelijking voorstelt van het phreatisch oppervlak.

We stellen ons nu het volgende probleem.

Laten de grootheden $d, \Delta_1, D_1, \Delta_2, R, c_1, c_2, k_0, k_1, k_2$ en γ gegeven zijn. Tengevolge van een constante (onbekende) neerslag vormt zich na voldoende lange tijd een stationnaire zoetwaterzak, zodanig dat het midden Q van de onderste zoutgrens op een gegeven diepte ξ ligt. Gevraagd wordt uit deze gegevens de nuttige neerslag N te berekenen, en verder de potentiaalfuncties $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$.

De exacte berekening van N vereist zeer veel rekenwerk, aangezien

1) De zoetwater-potentiaal is de stijghoogte boven zeeniveau van een ter plaatse aangebrachte open manometer, gevuld met zoet water.

de optredende differentiaalvergelijkingen wezenlijk niet-lineair zijn. Daarom passen we in dit rapport enige benaderingen toe (waardoor de resulterende differentiaalvergelijkingen lineair worden), teneinde in ieder geval een benaderde waarde van N te vinden. Tevens stelt deze benaderingsmethode ons in staat de zoetwater-potentiaal in de drie zandlagen te berekenen. Alleen dan mag men aannemen, dat de berekende potentiaal in goede benadering de ware potentiaal voorstelt, wanneer onder deze voorstelling de toegepaste benaderingen toelaatbaar blijken. Dit moet achteraf worden gecontroleerd.

2. Differentiaalvergelijkingen voor de functies $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$.

De hoogte van het phreatisch oppervlak boven de eerste kleilaag is $d + \varphi_0(x)$. De wet van Darcy voor de stroming in het duinzand geeft dus

$$(3) \quad Q_0(x) = -k_0(d + \varphi_0(x)) \frac{d\varphi_0(x)}{dx}.$$

De situatie is doorgaans zodanig, dat de functie $d + \varphi_0(x)$ (voor $|x| \leq R$) bij benadering constant is.

In dat geval mag men (3) vervangen door

$$(4) \quad Q_0(x) = -k_0 D_0 \frac{d\varphi_0(x)}{dx}$$

waarin D_0 een geschikt gekozen constante $> d$ voorstelt.

De continuïteitsvergelijking voor het duinzand luidt

$$\frac{dQ_0(x)}{dx} = -\frac{1}{c_1} (\varphi_0(x) - \varphi_1(x)) + N,$$

waarin N de nuttige neerslag voorstelt. Wegens (4) volgt nu voor het gebied K .

$$(5) \quad k_0 D_0 \frac{d^2 \varphi_0(x)}{dx^2} = \frac{1}{c_1} (\varphi_0(x) - \varphi_1(x)) - N.$$

De wet van Darcy voor de stroming in de middelste zandlaag geeft in de gebieden K en L

$$(6) \quad Q_1(x) = -k_1 D_1 \frac{d\varphi_1(x)}{dx}$$

en in het gebied M

$$Q_1(x) = -k_1 h_1(x) \frac{d\varphi_1(x)}{dx},$$

waarin $h_1(x)$ de hoogte van de bovenste zoetwatertong aangeeft. Wegens (1) hebben we

$$(7) \quad \frac{1}{\gamma} \varphi_1(x) = h_1(x) + \Delta_1 + d,$$

en dus volgt voor het gebied M

$$(8) \quad Q_1(x) = -\gamma k_1 h_1(x) \frac{dh_1(x)}{dx}.$$

De zoetwater-potentiaal aan de bovenzijde van de eerste kleilaag is in het gebied K gelijk aan $\varphi_0(x)$, doch is in de gebieden L en M gelijk aan γd . De continuïteitsvergelijking voor de middelste zandlaag luidt dus

$$(9) \quad \frac{dQ_1(x)}{dx} = -\frac{1}{c_1} (\varphi_1(x) - \varphi_0(x)) - \frac{\eta}{c_2} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x)).$$

voor het gebied K en

$$(10) \quad \frac{d Q_1(x)}{dx} = - \frac{1}{c_1} (\varphi_1(x) - \gamma d) - \frac{1}{c_2} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))$$

voor het gebied L. In verband met (7) volgt tenslotte voor het gebied M

$$(11) \quad \frac{d Q_1(x)}{dx} = - \frac{1}{c_1} (\varphi_1(x) - \gamma d) = - \frac{\gamma}{c_1} (h_1(x) + \Delta_1).$$

Uit (6) en (9) volgt voor het gebied K

$$(12) \quad k_1 D_1 \frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} = \frac{1}{c_1} (\varphi_1(x) - \varphi_0(x)) + \frac{1}{c_2} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x)).$$

Uit (6) en (10) volgt voor het gebied L

$$(13) \quad k_1 D_1 \frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} = \frac{1}{c_1} (\varphi_1(x) - \gamma d) + \frac{1}{c_2} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))$$

en tenslotte volgt uit (8) en (11) voor het gebied M

$$(14) \quad \frac{k_1 c_1}{2} \frac{d^2 h_1^2(x)}{dx^2} = h_1(x) + \Delta_1.$$

Zij $h_2(x)$ de diepte van de onderste zoutgrens, gemeten vanaf de benedenzijde van de onderste kleilaag. Dan luidt de wet van Darcy voor de stroming in de onderste zandlaag

$$(15) \quad Q_2(x) = - k_2 h_2(x) \frac{d\varphi_2(x)}{dx}.$$

In het gebied K is de functie $h_2(x)$ bij benadering constant en mogen we (15) vervangen door

$$(16) \quad Q_2(x) = - k_2 D_2 \frac{d\varphi_2(x)}{dx},$$

waarin D_2 een geschikt gekozen positieve constante voorstelt (iets kleiner dan de bekende afstand van het centrale punt Q op de zoutgrens tot de onderste kleilaag).

In het gebied L vervangen we (15) door

$$(17) \quad Q_2(x) = - k_2 D'_2 \frac{d\varphi_2(x)}{dx},$$

waarin D'_2 een geschikt gekozen positieve constante $< D_2$ voorstelt.

In het gebied M geldt wegens (2)

$$(18) \quad \frac{1}{\gamma} \varphi_2(x) = h_2(x) + \Delta_2 + D_1 + \Delta_1 + d$$

en is (15) dus equivalent met

$$(19) \quad Q_2(x) = - \gamma k_2 h_2(x) \frac{dh_2(x)}{dx}.$$

De continuïteitsvergelijking voor de onderste zandlaag geeft in de gebieden K en L

$$(20) \quad \frac{dQ_2(x)}{dx} = - \frac{1}{c_2} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))$$

en in het gebied M

$$(21) \quad \frac{dQ_2(x)}{dx} = - \frac{1}{c_2} [\varphi_2(x) - \gamma (d + \Delta_1 + D_1)] = - \frac{\gamma}{c_2} (h_2(x) + \Delta_2),$$

waarbij we gebruik maakten van (18) en van het feit, dat in het gebied M de zoetwater-potentiaal aan de bovenzijde van de onderste kleilaag gelijk is aan $\gamma (d + \Delta_1 + D_1)$.

Uit (16) en (20) volgt voor het gebied K

$$(22) \quad k_2 D_2 \frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} = \frac{1}{c_2} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)).$$

Evenzo volgt uit (17) en (20) voor het gebied L

$$(23) \quad k_2 D_2' \frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} = \frac{1}{c_2} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)).$$

Tenslotte volgt uit (19) en (21) voor het gebied M

$$(24) \quad \frac{k_2 c_2}{2} \frac{d^2 h_2^2(x)}{dx^2} = h_2(x) + \Delta_2.$$

3. De oplossing van de differentiaalvergelijkingen.

Tegens de symmetrie t.o.v. de z-as geldt

$$(25) \quad \frac{d\varphi_k(x)}{dx} = 0 \text{ voor } x = 0 \quad (k = 0, 1, 2).$$

In het gebied K voldoen de functies $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ bovendien aan het drietal simultane lineaire differentiaalvergelijkingen (5), (12) en (22). Deze voorwaarden bepalen in het gebied K deze functies op een drietal vrije constanten na.

Precieser gezegd: de constanten A, B en E kunnen zodanig worden gekozen, dat in het gebied K geldt

$$(26) \quad \varphi_0(x) = Aa \cosh \sqrt{\lambda_1} x + Ba \cosh \sqrt{\lambda_2} x - \rho N x^2 + E + \sigma N$$

$$(27) \quad \varphi_1(x) = -Ab \cosh \sqrt{\lambda_1} x + Bf \cosh \sqrt{\lambda_2} x - \rho N x^2 + E$$

$$(28) \quad \varphi_2(x) = Ag \cosh \sqrt{\lambda_1} x - Bh \cosh \sqrt{\lambda_2} x - \rho N x^2 + E - \tau N.$$

Hierin is N de nuttige neerslag en worden de constanten $\lambda_1, \lambda_2, a, b, f, g, h, \rho, \sigma$ en τ als volgt berekend. Stel vooreerst

$$(29) \quad \beta_0 = \frac{1}{k_0 D_0 c_1}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{k_1 D_1 c_1}, \quad \beta_1 = \frac{1}{k_1 D_1 c_2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{k_2 D_2 c_2}.$$

Dan geldt

$$(30) \quad 2\lambda_{1,2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_0 + \beta_1 \pm \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_0 - \beta_1)^2 + 4\alpha_1\beta_1}$$

met $\lambda_1 > \lambda_2$. Verder is

$$a = \frac{\alpha_1}{k_0 D_0}, \quad b = \frac{\lambda_1 - \beta_0}{k_1 D_1}, \quad f = \frac{\beta_0 - \lambda_2}{k_1 D_1}, \quad g = \frac{\lambda_1 - \alpha_1 - \beta_0}{k_2 D_2},$$

$$h = \frac{\alpha_1 + \beta_0 - \lambda_2}{k_2 D_2},$$

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{1}{k_0 D_0 + k_1 D_1 + k_2 D_2},$$

$$\sigma = \frac{(k_1 D_1 + k_2 D_2) c_1}{k_0 D_0 + k_1 D_1 + k_2 D_2},$$

$$\tau = \frac{k_2 D_2 c_2}{k_0 D_0 + k_1 D_1 + k_2 D_2}.$$

De algemene oplossing van het tweetal simultane differentiaalvergelijkingen (13) en (23) (welke gelden in het gebied L) bevat vier vrije constanten. Wegens symmetrieredenen kunnen we ons beperken tot het aan de rechterzijde gelegen gebied L , alwaar we de nieuwe variabele

$$(31) \quad y = x - R$$

invoeren. De algemene oplossing van (13) en (23) wordt gegeven door

$$(32) \quad \varphi_1(x) = \varphi_1(y) = \gamma d + (\alpha_3 - \mu_1) (P e^{\sqrt{\mu_1} y} + Q e^{-\sqrt{\mu_1} y}) \\ + (\alpha_3 - \mu_2) (S e^{\sqrt{\mu_2} y} + T e^{-\sqrt{\mu_2} y})$$

$$(33) \quad \varphi_2(x) = \varphi_2(y) = \gamma d + \alpha_3 (P e^{\sqrt{\mu_1} y} + Q e^{-\sqrt{\mu_1} y}) \\ + \alpha_3 (S e^{\sqrt{\mu_2} y} + T e^{-\sqrt{\mu_2} y}).$$

Hierin zijn P, Q, S en T vrije constanten. De grootheden γ en d zijn gegeven, en de overige constanten worden bepaald volgens

$$(34) \quad \alpha_1 = \frac{1}{k_1 D_1 c_1}, \quad \beta_1 = \frac{1}{k_1 D_1 c_2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{k_2 D_2 c_2}$$

en

$$(35) \quad 2\mu_{1,2} = \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 \pm \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3 - \beta_1)^2 + 4\alpha_1\beta_1}$$

met $\mu_1 > \mu_2 > 0$.

Voor de rechter-zoetwatertong in de middelste zandlaag stellen we

$$(36) \quad \xi = x_1 - x,$$

waarin x_1 de abscis van de tongpunt voorstelt. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking (14) wordt gegeven door

$$(37) \quad \xi(h) = \sqrt{k_1 c_1} \int_0^h \frac{dt}{\sqrt{\frac{2}{3}t + \Delta_1 + \frac{C}{t^2}}} + C,$$

waarin $\xi(h)$ de omkering voorstelt van de functie $h_1(x - \xi)$ en, waarin C en C' vrije constanten zijn. Wegens $h_1(x_1) = 0$ hebben we $\xi(0) = 0$ en dus $C' = 0$. Wegens de stromingsvoorwaarde $\lim_{x \rightarrow x_1} Q_1(x) = 0$ hebben we in verband met (8)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{d\xi}}{\frac{dh}{d\xi}} = 0$$

en dus moet in (37) de constante C nul zijn. Uit (37) volgt nu

$$\xi(h) = 3\sqrt{k_1 c_1} \left(\sqrt{\frac{2}{3}h + \Delta_1} - \sqrt{\Delta_1} \right)$$

en dus

$$(38) \quad h_1(x) = h_1(x_1 - \xi) = \frac{1}{6k_1 c_1} \xi^2 + \sqrt{\frac{\Delta_1}{k_1 c_1}} \xi;$$

hierin is x_1 een voorlopig nog onbekende constante. Wegens (7) volgt uit (38) voor het gebied M

$$(39) \quad \frac{1}{8} \varphi_1(x) = \frac{1}{8} \varphi_1(x_1 - \xi) = \frac{1}{6k_1 c_1} \xi^2 + \sqrt{\frac{\Delta_1}{k_1 c_1}} \xi + \Delta_1 + d_1.$$

Zij voor de rechts-onder gelegen zoetwatertong x_2 de abscis van de tongpunt. Dan volgt analoog uit (24)

$$(40) \quad h_2(x) = h_2(x_2 - \eta) = \frac{1}{6k_2 c_2} \eta^2 + \sqrt{\frac{\Delta_2}{k_2 c_2}} \eta$$

en in verband met (18) geldt dus voor het gebied M

$$(41) \quad \frac{1}{\gamma} \varphi_2(x) = \frac{1}{\gamma} \varphi_2(x_2 - \eta) = \frac{1}{6 k_2 c_2} \eta^2 + \sqrt{\frac{\Delta_2}{k_2 c_2}} + 2 + D_1 + \Delta_1 + d.$$

Hierin is x_2 een voorlopig nog onbekende constante.

4. De berekening van de nuttige neerslag.

Tegens symmetrieredenen kunnen we ons voortaan beperken tot positieve waarden x . De volgende gegevens staan ons dan ten dienste.

1. In het gebied L is de zoetwater-potentiaal aan de bovenkant van de bovenste kleilaag gelijk aan γd . Hieruit volgt

$$(42) \quad \varphi_0(R) = \gamma d.$$

2. De diepte ξ van het midden Q van de onderste zoutgrens is gegeven en dus ook de waarde $\varphi_2(0)$:

$$(43) \quad \varphi_2(0) = \gamma \xi.$$

3. Zowel de potentiaal als de stroming in de middelste en onderste zandlaag is continu voor $x = R$. Wanneer $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ de potentialen voorstellen in het gebied K en wanneer $\psi_1(x-R)$ en $\psi_2(x-R)$ de potentialen voorstellen in het gebied L, dan geldt dus

$$(44) \quad \varphi_1(R) = \psi_1(0) \quad , \quad \varphi_2(R) = \psi_2(0)$$

en

$$(45) \quad \varphi_1'(R) = \psi_1'(0) \quad , \quad \varphi_2'(R) = \psi_2'(0).$$

4. De zoutgrens van de bovenste zoetwatertong begint aan de bovenzijde van de onderste kleilaag in het nog onbekende punt U met abscis $x = R + y_0$. In dit punt is de hoogte van de zoetwatertong dus gelijk aan D_1 . De potentiaal in het punt U wordt dus gegeven door

$$(46) \quad \psi_1(y_0) = \gamma (D_1 + \Delta_1 + d)$$

Verder is wegens (38) de lengte ξ_0 van de bovenste zoetwatertong gelijk aan de positieve wortel ξ_0 van de vierkantsvergelijking

$$(47) \quad \frac{1}{6 k_1 c_1} \xi_0^2 + \sqrt{\frac{\Delta_1}{k_1 c_1}} \xi_0 = D_1.$$

Daar de stroming in het punt U continu is volgt uit (39)

$$(48) \quad \psi_1'(y_0) = -\frac{\gamma \xi_0}{3k_1 c_1} - \gamma \sqrt{\frac{\Delta_1}{k_1 c_1}} = -\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \frac{D_1 + \frac{3}{2}\Delta_1}{k_1 c_1}}$$

en ook $\psi_1(y_0)$ kan dus als een gegeven grootheid worden beschouwd. De breedte y_0 van het gebied L is evenwel nog onbekend.

5. Zij V het punt op de onderste zoutgrens met abscis $R+y_0$ en zij $\eta_0 = x_2 - R - y_0$ de (onbekende) lengte van de onderste zoetwatertong. Daar in het punt V zowel de stroming als de potentiaal continu is, volgt uit (41) dat

$$\frac{1}{\gamma} \psi_2(y_0) = \frac{1}{6k_2 c_2} \eta_0^2 + \sqrt{\frac{\Delta_2}{k_2 c_2}} \eta_0 + \Delta_2 + D_1 + \Delta_1 + d$$

en

$$\frac{1}{\gamma} \psi_2'(y_0) = -\frac{\eta_0}{3k_2 c_2} - \sqrt{\frac{\Delta_2}{k_2 c_2}}.$$

Door eliminatie van η_0 vinden we dus de relatie

$$(49) \quad \frac{1}{\gamma} \psi_2(y_0) = \frac{3}{2} k_2 c_2 \left\{ \frac{\psi_2'(y_0)}{\gamma} \right\}^2 - \frac{1}{2} \Delta_2 + D_1 + \Delta_1 + d.$$

In de formule (26), (27) en (28) voor de potentialen in het gebied K zijn de grootheden N , A , B en $\mathcal{E}$ onbekend. In de formules (32) en (33) voor de potentialen in het gebied L zijn de grootheden P , Q , S en T onbekend. Tezamen met de onbekende breedte y_0 van het gebied L zijn er dus totaal negen onbekende grootheden. Evenwel beschikken we over negen bekende relaties tussen deze grootheden, nl. (42), (43), (44), (45), (46), (48) en (49), en het is dus in principe mogelijk elk der negen onbekende grootheden te berekenen. Deze berekening kan als volgt geschieden.

Zij $\varphi_0(0) = H$ de hoogte van het centrale punt van het phreatisch oppervlak, gemeten vanaf zeeniveau. De vergelijkingen (42), (43) en $\varphi_0(0) = H$ stellen ons in staat de grootheden A , B en $\mathcal{E}$ (welke optreden in de formules (26), (27) en (28)) uit te drukken in de onbekenden N en H . En wel vinden we na enige berekening

$$(50) \quad \begin{cases} A = A_0 + A_1 H + A_2 N \\ B = B_0 + B_1 H + B_2 N \\ \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 H + \mathcal{E}_2 N \end{cases},$$

waarin de coëfficiënten A_i , B_i en $\mathcal{E}_i$ ($i = 0, 1, 2$) als volgt worden bepaald.

Zij

$$(51) \quad p = \cosh(\sqrt{\lambda_1} R) \quad , \quad q = \cosh(\sqrt{\lambda_2} R) \quad ,$$

$$\frac{1}{\Delta} = a \{ (1-q)(a-g) - (1-p)(a+h) \} \quad .$$

Dan is

$$A_0 = \Delta \{ \gamma d(a+h) - \gamma \xi a(1-q) \}$$

$$A_1 = \Delta \{ a(1-q) - (a+h) \}$$

$$A_2 = \Delta \{ \rho R^2(a+h) - \Delta a(1-q)(\sigma + \tau) \}$$

$$B_0 = \Delta \{ -\gamma d(a-g) + \gamma \xi a(1-p) \}$$

$$B_1 = \Delta \{ -a(1-p) + (a-g) \}$$

$$B_2 = -\Delta \rho R^2(a-g) + \Delta a(1-p)(\sigma + \tau)$$

$$\mathcal{E}_0 = -a(A_0 + B_0)$$

$$\mathcal{E}_1 = 1 - a(A_1 + B_1)$$

$$\mathcal{E}_2 = -a(A_2 + B_2) - \sigma.$$

Uit (26), (27), (28) en (50) volgt onmiddellijk

$$(52) \quad \begin{cases} \varphi_1(R) = G_0 + G_1 H + G_2 N \\ \varphi_2(R) = K_0 + K_1 H + K_2 N \\ \frac{d\varphi_1(R)}{dR} = L_0 + L_1 H + L_2 N \\ \frac{d\varphi_2(R)}{dR} = M_0 + M_1 H + M_2 N \end{cases} ,$$

waarin de grootheden G_i , K_i , L_i en M_i ($i = 0, 1, 2$) als volgt worden berekend. Laten p en q weer door (51) worden gedefinieerd en stel verder

$$r = \sqrt{\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_1} R) \quad , \quad s = \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} R) \quad .$$

Dan is

$$G_0 = -bpA_0 + fqB_0 + \mathcal{E}_0$$

$$G_1 = -bpA_1 + fqB_1 + \mathcal{E}_1$$

$$G_2 = -bpA_2 + fqB_2 - \rho R^2 + \mathcal{E}_2$$

$$K_0 = gpA_0 - hqB_0 + \mathcal{E}_0$$

$$K_1 = g p A_1 - h q B_1 + \varepsilon_1$$

$$K_2 = g p A_2 - h q B_2 - \rho R^2 - T + \varepsilon_2$$

$$L_0 = - b r A_0 + f s B_0$$

$$L_1 = - b r A_1 + f r B_1$$

$$L_2 = - b r A_2 + f r B_2 - 2 \rho R$$

$$M_0 = g r A_0 - h s B_0$$

$$M_1 = g r A_1 - h s B_1$$

$$M_2 = g r A_2 - h s B_2 - 2 \rho R$$

Wegens (52) stellen de vier aansluitingsvoorwaarden (44) en (45) ons in staat de in (32) en (33) voorkomende grootheden P, Q, S en T uit te drukken in H en N. We vinden

$$(53) \quad \begin{cases} P = P_0 + P_1 H + P_2 N \\ Q = Q_0 + Q_1 H + Q_2 N \\ S = S_0 + S_1 H + S_2 N \\ T = T_0 + T_1 H + T_2 N, \end{cases}$$

waarin de coëfficiënten P_i , Q_i , S_i en T_i ($i = 0, 1, 2$) als volgt worden berekend. Stel

$$\frac{1}{\theta} = 2 \alpha_3 (\mu_1 - \mu_2).$$

Dan is

$$P_0 = \theta \left\{ -\alpha_3 G_0 + (\alpha_3 - \mu_2) K_0 + \frac{\alpha_3}{V \mu_1} L_0 + \frac{\alpha_3 - \mu_2}{V \mu_1} M_0 \right\}$$

$$Q_0 = \theta \left\{ -\alpha_3 G_0 + (\alpha_3 - \mu_2) K_0 + \frac{\alpha_3}{V \mu_1} L_0 - \frac{\alpha_3 - \mu_2}{V \mu_1} M_0 \right\}$$

$$P_1 = \theta \left\{ -\alpha_3 G_1 + (\alpha_3 - \mu_2) K_1 - \frac{\alpha_3}{V \mu_1} M_1 + \frac{\alpha_3 - \mu_2}{V \mu_1} N_1 \right\}$$

$$Q_1 = \theta \left\{ -\alpha_3 G_1 + (\alpha_3 - \mu_2) K_1 + \frac{\alpha_3}{V \mu_1} M_1 - \frac{\alpha_3 - \mu_2}{V \mu_1} N_1 \right\}$$

$$P_2 = \theta \left\{ -\alpha_3 G_2 + (\alpha_3 - \mu_2) K_2 - \frac{\alpha_3}{V \mu_1} M_2 + \frac{\alpha_3 - \mu_2}{V \mu_1} N_2 \right\}$$

$$Q_2 = \theta \left\{ -\alpha_3 G_2 + (\alpha_3 - \mu_2) K_2 + \frac{\alpha_3}{V \mu_1} M_2 - \frac{\alpha_3 - \mu_2}{V \mu_1} N_2 \right\}$$

Wanneer men in de rechterleden van deze formules de grootheden μ_1 en μ_2 verwisselt (waardoor ondermeer θ in $-\theta$ overgaat) dan zijn de linkerleden in volgorde gelijk aan S_0, T_0, S_1, T_1, S_2 en T_2 .

Wanneer y een reëel getal is met $0 \leq y \leq y_0$ dan volgt uit (32), (33) en (53)

$$(54) \quad \psi_1(y) = \gamma d + \alpha_0 + \alpha_1 H + \alpha_2 N$$

$$(55) \quad \psi_2(y) = \gamma d + \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 H + \mathcal{D}_2 N$$

$$(56) \quad \psi'_1(y) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 H + \mathcal{L}_2 N$$

$$(57) \quad \psi'_2(y) = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 H + \mathcal{D}_2 N$$

Hierin worden $\alpha_i, \mathcal{D}_i, \mathcal{L}_i$ en $\mathcal{D}_i$ ($i = 0, 1, 2$) gegeven door

$$\alpha_i = (\alpha_3 - \mu_1) (P_i e^{\sqrt{\mu_1} y} + Q_i e^{-\sqrt{\mu_1} y}) + (\alpha_3 - \mu_2) (S_i e^{\sqrt{\mu_2} y} + T_i e^{-\sqrt{\mu_2} y})$$

$$\mathcal{D}_i = \alpha_3 \{ P_i e^{\sqrt{\mu_1} y} + Q_i e^{-\sqrt{\mu_1} y} + S_i e^{\sqrt{\mu_2} y} + T_i e^{-\sqrt{\mu_2} y} \}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i = (\alpha_3 - \mu_1) \sqrt{\mu_1} (P_i e^{\sqrt{\mu_1} y} - Q_i e^{-\sqrt{\mu_1} y}) + \\ + (\alpha_3 - \mu_2) \sqrt{\mu_2} (S_i e^{\sqrt{\mu_2} y} - T_i e^{-\sqrt{\mu_2} y}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_i = \alpha_3 \sqrt{\mu_1} (P_i e^{\sqrt{\mu_1} y} - Q_i e^{-\sqrt{\mu_1} y}) + \alpha_3 \sqrt{\mu_2} (S_i e^{\sqrt{\mu_2} y} - T_i e^{-\sqrt{\mu_2} y})$$

De grootheden $\alpha_i, \mathcal{D}_i, \mathcal{L}_i$ en $\mathcal{D}_i$ zijn dus van y afhankelijk. Wegens (54), (55), (56) en (57) volgen uit (46), (48) en (49) drie betrekkingen tussen de onbekenden H, N en y_0 . Deze betrekkingen zijn lineair of kwadratisch in H en N , doch transcendent in y_0 en de grootheden H, N en y_0 kunnen hieruit dus alleen worden opgelost met behulp van een iteratieproces. En wel gaan we als volgt te werk: we kiezen eerst een positieve waarde y en bepalen H en N zodanig, dat aan de volgende relaties is voldaan.

$$(58) \quad \psi_1(y) = \gamma (D_1 + \Delta_1 + d)$$

$$(59) \quad \frac{1}{\gamma} \psi_2(y) = \frac{3}{2} k_2 c_2 \left[\frac{\psi'_2(y)}{\gamma} \right]^2 - \frac{1}{2} \Delta_2 + D_1 + \Delta_1 + d.$$

Wegens (54), (55) en (57) is de eerste resp. tweede relatie lineair resp. kwadratisch in H en N . De bepaling van H en N kan als volgt geschieden.

Met behulp van (54) en (58) kunnen we in de formules (55) en (57) de groothed H elimineren. We vinden

$$(60) \quad \psi_2(y) = U + V N$$

$$(61) \quad \frac{d\psi_2(y)}{dy} = W + X N ,$$

waarin U , V , W en X als volgt worden berekend.

$$U = \gamma d + \Phi_0 + \frac{\gamma \Phi_1(D_1+d)}{\alpha_1}$$

$$V = \frac{\alpha_1 \Phi_2 - \alpha_2 \Phi_1}{\alpha_1}$$

$$W = \frac{\alpha_1 \psi_0 - \alpha_0 \psi_1 + \gamma \psi_1(D_1+d)}{\alpha_1}$$

$$X = \frac{\alpha_1 \psi_2 - \alpha_2 \psi_1}{\alpha_1} .$$

Uit (59), (60) en (61) volgt de vierkantsvergelijking

$$(62) \quad N^2 + E N + F = 0 ,$$

waarin E en F als volgt worden berekend. Zij

$$\Lambda = \frac{3k_2 c_2}{2\gamma} \quad \Omega = \gamma \left(-\frac{1}{2} \Delta_2 + D_1 + \Delta_1 + d \right) .$$

Dan is

$$E = \frac{2\Lambda WX - V}{\Lambda X^2} \quad F = \frac{\Lambda W^2 + \Omega - U}{\Lambda X^2}$$

Indien geen der beide wortels van (62) een positieve reële waarde is, dan dient men de geschatte benadering y van y_0 te verwerpen. Indien voor een reële en positieve wortel van (62) de door (61) gegeven waarde $\psi_2(y)$ positief is, dan is deze wortel onbruikbaar (de relatie (59) houdt geen rekening met het teken van $\psi_2'(y)$). Indien men een reële en posi-

tieve wortel van (62) heeft gevonden met $\psi_2'(y) = W + XN < 0$, dan moet worden nagegaan in hoeverre aan de betrekking (48) is voldaan. Wegens (58), (54) en (56) is (48) equivalent met ')

$$(63) \quad N = \frac{\gamma \alpha_1 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{D_1 + \frac{3}{2} \Delta_1}{k_1 c_1}} + \gamma \alpha_1 (D_1 + \Delta_1) + \alpha_0 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_0}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

Wanneer men een positief getal y heeft gevonden, "), zodanig dat een wortel van de vierkantsvergelijking (62) ongeveer gelijk is aan de door (63) gegeven waarde. (en wanneer bovendien geldt $W + XN < 0$), dan is deze waarde y in goede benadering gelijk aan de breedte y_0 van het gebied L. Tevens vinden we dan de nuttige neerslag N en wegens (46) en (54) wordt de maximale hoogte H van het phreatisch oppervlak gegeven door

$$\alpha_1 H = \gamma (D_1 + \Delta_1) - \alpha_0 - \alpha_2 N$$

Wegens (50) kennen we de grootheden A , B en ε , en wegens (53) kennen we ook de grootheden P , Q , S en T . In verband met (26), (27) en (28) kunnen de potentialen in het gebied K worden berekend. Verder kunnen met behulp van (32) en (33) de potentialen in het gebied L worden berekend.

5. Een numeriek voorbeeld.

Voor de gegeven grootheden kiezen we de volgende waarden

$$\begin{array}{llll} k_0 = 11 & k_1 = 23 & k_2 = 45 & \\ c_1 = 1000 & c_2 = 2000 & & \\ d = 13 & \Delta_1 = 7 & D_1 = 15 & \Delta_2 = 5 \quad \zeta = 110 \\ R = 1650 & \gamma = 0,02 & & \end{array}$$

Verder doen we voor D_0 , D_2 en D_2' de volgende keuze

$$D_0 = 14 \quad D_2 = 65 \quad D_2' = 55$$

') Men zou geneigd zijn N eerst uit (63) te berekenen en daarna te controleren in hoeverre de gevonden waarde N in overeenstemming is met de betrekking (49). Toch is deze methode niet aan te bevelen, omdat bij numerieke berekening de teller in het rechterlid van (63) onnauwkeurig is door het tegen elkaar wegvallen der eerste (significante) cijfers.

") Teneinde sneller tot een goede benadering te komen, kan men zich bij het begin van de iteratie laten leiden door de verwachting, dat N de orde grootte 10^{-3} heeft.

We vinden nu achtereenvolgens

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 9,4238040 \cdot 10^{-6} & \lambda_2 &= 1,5884687 \cdot 10^{-6} \\ a &= 1,8821758 \cdot 10^{-8} & b &= 0,84936159 \cdot 10^{-8} \\ f &= 1,4217501 \cdot 10^{-8} & g &= 0,00108536 \cdot 10^{-8} \\ h &= 0,26678935 \cdot 10^{-8} & \varphi &= 0,00014602804 \\ \mathcal{T} &= 955,02336 & \tau &= 1708,5280\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_0 &= 4,3346317 \cdot 10^6 & A_1 &= -2,5905963 \cdot 10^6 & A_2 &= 5306,1908 \cdot 10^6 \\ B_0 &= -106,16916 \cdot 10^6 & B_1 &= 48,801696 \cdot 10^6 & B_2 &= -128590,52 \cdot 10^6 \\ \mathcal{E}_0 &= 1,9167049 & \mathcal{E}_1 &= 0,13022586 & \mathcal{E}_2 &= 1365,4045 \\ G_0 &= -7,1324711 & G_1 &= 4,6921830 & G_2 &= -10030,1611 \\ K_0 &= 3,0712684 & K_1 &= -0,40099480 & K_2 &= 657,7536 \\ L_0 &= -0,016443458 & L_1 &= 0,0087936393 & L_2 &= -20,513921 \\ M_0 &= 0,0014172721 & M_1 &= -0,0065304148 & M_2 &= 1,2348346 \\ \mu_1 &= 4,4172839 \cdot 10^{-6} & \mu_2 &= 1,325624 \cdot 10^{-7} \\ P_0 &= 1,915485 \cdot 10^6 & P_1 &= -1,0643486 \cdot 10^6 & P_2 &= 2359,4050 \cdot 10^6 \\ Q_0 &= 0,03540765 \cdot 10^6 & Q_1 &= -0,06292459 \cdot 10^6 & Q_2 &= 34,28774 \cdot 10^6 \\ S_0 &= 10,190284 \cdot 10^6 & S_1 &= -1,9776529 \cdot 10^6 & S_2 &= 2114,2679 \cdot 10^6 \\ T_0 &= 1,7746021 \cdot 10^6 & T_1 &= 1,1200020 \cdot 10^6 & T_2 &= -1252,0803 \cdot 10^6\end{aligned}$$

De berekening van bovengenoemde constanten is betrekkelijk eenvoudig. Het meest lastige deel van de berekening is de uitvoering van de iteratie genoemd aan het eind van de vorige paragraaf. We zullen deze niet nader beschrijven, doch alleen het eindresultaat noemen. Dit is

$$y_0 = 1140 \quad ; \quad N = 0,002827 \quad ; \quad H = 8,0659 \quad .$$

De grootheden A , B , $\mathcal{E}$, P , Q , S en T kunnen nu direct met (50) en (53) worden berekend. De potentialen in het gebied K (resp. L) kunnen daarna worden bepaald met behulp van de formules (26), (27) en (28) (resp. (32) en (33)).

Uit (47) vinden we $\xi_0 = 572$ voor de lengte van de bovenste zoetwater-tong. De abscis x_1 van de tongpunt is dus $R+y_0+\xi_0 = 3402$ en met behulp van (39) kan men dus voor de middelste zandlaag de potentiaal in het gebied M berekenen.

Wegesn $\psi_2(y_0) = \sqrt{2}(1140) = 1,2917$ ligt het op blz. 9 genoemde punt V op een diepte

$$\frac{1,2917}{0,02} = 64,58$$

en de hoogte van de zoetwatertong aldaar is dus gelijk aan $64,58-40=24,58$ (de benedenzijde van de onderste kleilaag ligt n.l. op een diepte 40). Analooq met (47) is de lengte η_0 van de onderste zoetwatertong gelijk aan de positieve wortel van de vierkantsvergelijking

$$\frac{1}{6k_2c_2} \eta_0^2 + \sqrt{\frac{\Delta_2}{k_2c_2}} \eta_0 = 24,58.$$

We vinden $\eta_0 = 2150$, hetgeen impliceert dat de abscis van de tongpunt gelijk is aan $x_2 = R+y_0+\eta_0 = 4940$. Met behulp van (41) kan men nu voor de onderste zandlaag de potentiaal in het gebied M berekenen.

De op boven aangegeven wijze berekende functies $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ en $\phi_2(x)$ zijn grafisch voorgesteld in fig. 1 (voorkomende aan het eind van dit rapport). De gedaante van de zoutgrenzen volgt onmiddellijk uit de formules (1) en (2) en zijn eveneens in genoemde figuur weergegeven. Tevens is in deze figuren voor de verschillende zandlagen de per tijdseenheids wegstromende hoeveelheid water aangegeven voor $x=R$ en voor $x=R+y_0$.

Zoals aan het slot van paragraaf 1 is opgemerkt, moeten wij nu achteraf nog nagaan in hoeverre de keuze

$$D_0 = 14 \quad D_2 = 65 \quad D'_2 = 55$$

in overeenstemming is met de uiteindelijk verkregen gedaante van het phreatische oppervlak en de onderste zoutgrens. Alleen dan mogen we veel waarde hechten aan de verkregen einduitkomst, wanneer in goede benadering gelijk is aan de gemiddelde hoogte van het phreatisch oppervlak en wanneer verder D_2 (resp. D'_2) in goede benadering gelijk is aan de gemiddelde afstand van de onderste zoutgrens tot de onderste kleilaag, wat betreft het gebied K (resp. het gebied L). Aan de hand van fig. 1 zien we, dat D_0 iets te klein en D_2 iets te groot is gekozen. Evenwel is D'_2 veel te groot gekozen (55 tegenover 34). Een grotere doorstroomhoogte in de onderste zandlaag betekent dat een grotere nuttige neerslag nodig is om het centrum Q van de onderste zoutgrens op een diepte 110 beneden zeeniveau te houden. We moeten dus verwachten, dat de gevonden waarde $N = 0,0028$ groter is dan de ware nuttige neerslag.

6. De bepaling van de veilige wateronttrekking.

Wanneer we onder de nuttige neerslag verstaan de neerslag, welke van invloed is op de zoetwaterpotentiaal in de middelste en onderste

zandlaag, dan zal door boven-waterwinning de nuttige neerslag verminderen. Als gevolg van deze vermindering zal de zoutgrens in de middelste zandlaag in de richting van het duingebied opschuiven. Wanneer de genoemde vermindering zodanig groot is, dat deze zoutgrens onder het duingebied komt te liggen, dan is het verzoutingsgevaar voor diep-waterwinning zeer groot. In verband hiermede vragen wij naar de minimale nuttige neerslag, waarvoor de zoutgrens in de middelste zandlaag nog geheel buiten het duingebied valt. Voor deze minimale neerslag N krijgen we dus de situatie welke is voorgesteld in fig. 2 aan het eind van dit rapport.

Onder het duingebied worden ook nu de potentiaalfuncties $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ gegeven door de formules (26), (27) en (28). Hierin zijn de constanten A , B , ε en N onbekend. De andere constanten zijn afhankelijk van de gemaakte keuze van de doorstroomhoogten D_0 en D_2 . (achteraf zal men weer moeten controleren in hoeverre deze keuze toelaatbaar is).

Terwijl wij in de vorige paragrafen uitgingen van de gegeven waarde $\varphi_2(0) = \gamma \zeta$ moeten wij nu uitgaan van het gegeven $y_0 = 0$. Uit (42), (44), (45), (46), (48) en (49) vinden wij

$$(64) \quad \varphi_0(R) = \gamma d$$

$$(65) \quad \varphi_1(R) = \gamma (D_1 + \Delta_1 + d)$$

$$(66) \quad \varphi_1'(R) = -\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \frac{D_1 + \frac{3}{2} \Delta_1}{k_1 c_1}}$$

$$(67) \quad \frac{1}{\gamma} \varphi_2(R) = \frac{3}{2} k_2 c_2 \left\{ \frac{\varphi_1'(R)}{\gamma} \right\}^2 - \frac{1}{2} \Delta_2 + D_1 + \Delta_1 + d.$$

Wegens (26), (27) en (28) volgt hieruit een viertal vergelijkingen tussen de grootheden A , B , ε en N . De eerste drie vergelijkingen zijn lineair en de vierde is kwadratisch en de onbekende A , B , ε en N kunnen dus gemakkelijk worden berekend. De berekening is uitgevoerd in de speciale op blz. 14 genoemde waarden k_0 , k_1 , k_2 , c_1 , c_2 , d , Δ_1 , D_1 , Δ_2 , R en γ . Van D_0 en D_2 kozen wij

$$(68) \quad D_0 = 14 \quad D_2 = 8$$

en wij vonden

$$A = -232712,93$$

$$B = -404337,$$

$$\varepsilon = 1,429830$$

$$N = 0,000409013$$

De functies $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ (en dus ook de zoutgrenzen) kunnen nu gemakkelijk worden berekend. De resulterende situatie is weergegeven in fig. 2 aan het eind van dit rapport. Achteraf moesten we weer controleren in hoeverre de keuze (68) toelaatbaar is. De gemiddel-

de hoogte van het phreatisch oppervlak is zeer nauwkeurig gelijk aan $D_0 = 14$. Van het duingebied is de gemiddelde doorstroomhoogte in de onderste zandlaag 10 in goede overeenstemming met de keuze $D_2 = 8$. We moeten verwachten dat de gevonden waarde N iets kleiner is dan de ware waarde.

Opm. De enige essentiële moeilijkheid bij de berekening van N ligt in de keuze van D_2 . Doorgaans zal men voor enige waarden D_2 de bovengenoemde berekening moeten uitvoeren, alvorens tot een aanvaardbaar resultaat te komen.

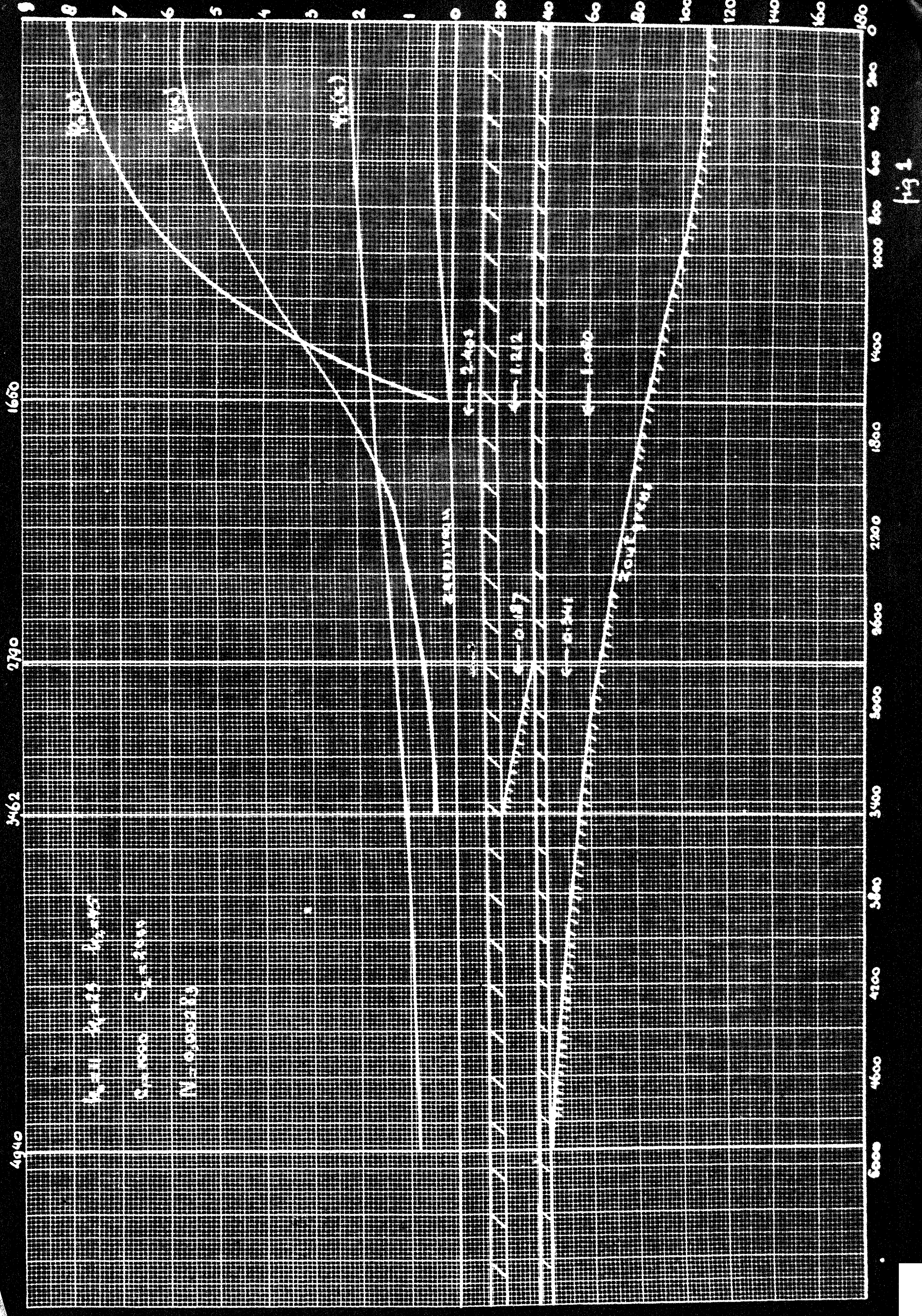


fig 1

